

Sur la préservation de la cohérence par image inverse extraordinaire par une immersion fermée

Daniel Caro

Abstract

Let \mathcal{V} be a complete discrete valuation ring of unequal characteristic with perfect residue field, $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$ be a closed immersion of smooth, quasi-compact, separated formal schemes over \mathcal{V} , T be a divisor of X such that $U := T \cap Z$ is a divisor of Z . In his theory of arithmetic \mathcal{D} -modules, Berthelot constructed the inductive system of sheaves of rings $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)}(T) := (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(T))_{m \in \mathbb{N}}$, where $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ is the p -adic completion of the ring of differential operators of level m over \mathcal{X} and where T means that we add overconvergent singularities along the divisor T . Moreover, he introduced the sheaf $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ of differential operators over \mathcal{X} of finite level with overconvergent singularities along T . Let $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(\bullet)}(T))$ and $\mathcal{E} := \varinjlim (\mathcal{E}^{(\bullet)})$ the corresponding object of $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. In this paper, we study sufficient conditions on \mathcal{E} so that if $u^!(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$ then $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(\bullet)}(U))$. For instance, we check that this is the case when \mathcal{E} is a coherent $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module such that the cohomological spaces of $u^!(\mathcal{E})$ are isocrystals on \mathcal{Z} overconvergent along U .

Table des matières

1	Préliminaires topologiques	3
1.1	Espaces de type LB	3
1.2	Topologie projective d'un produit tensoriel sur une K -algèbre	4
1.3	Complétions de produit tensoriel de modules localement convexes	6
2	Espaces de type LB en théorie des D-modules arithmétiques	7
2.1	Topologies canoniques	7
2.2	Cas des isocristaux surconvergents	9
2.3	Cas du faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes	10
3	Préservation de la cohérence par foncteur cohomologique local	11
3.1	Images inverses par une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels affines et lisses	11
3.2	Image directe de niveau m : exactitude	12
3.3	Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré zéro	14
3.4	Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré maximal	15

Introduction

Soit \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, de corps résiduel parfait et de corps des fractions K . Soient $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$ une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels séparés, quasi-compacts et lisses, T un diviseur de X tel que $U := T \cap Z$ soit un diviseur de Z . Pour simplifier la présentation de cette introduction, supposons que u soit de codimension pure égale à 1. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(T) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, où $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(T)$ désigne les faisceaux d'anneaux construits par Berthelot dans [Ber96, 4.2.3] et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ est le faisceau des

opérateurs différentiels de niveau m sur \mathfrak{X} (voir [Ber96, 2.2]), le chapeau signifiant la complétion p -adique. On dispose de plus des morphismes canoniques de changement de niveaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m+1)}(T)$ (voir [Ber96]), ce qui donne le système inductif d'anneaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T) := (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T))_{m \in \mathbb{N}}$. Berthelot construit le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini en posant $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Par tensorisation par \mathbb{Q} et passage à la limite sur le niveau, on obtient le foncteur noté $\varinjlim : D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Afin d'obtenir un foncteur pleinement fidèle qui factorise ce foncteur \varinjlim , Berthelot a introduit la catégorie $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ qui est une localisation de $D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$. Il a défini la sous-catégorie pleine des complexes cohérents de $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ qu'il note $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$. Il a alors établi que le foncteur \varinjlim induit l'équivalence de catégories

$$(*) \quad \varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T)) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}).$$

Soit $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ est un objet de $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ et $\mathcal{E} := \varinjlim (\mathcal{E}^{(\bullet)})$ l'objet de $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ correspondant. On dispose de $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ l'image inverse extraordinaire de $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ par u et de $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ le foncteur cohomologique local à support strict dans Z de $\mathcal{E}^{(\bullet)}$. Ces foncteurs s'étendent naturellement à $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}(T))$ et sont compatibles à l'équivalence de catégories $(*)$ ci-dessus, i.e., on bénéficie des isomorphismes canoniques fonctoriels en $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ de la forme : $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ et $u^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \circ u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$. Comme conséquence immédiate de [Car12], on vérifie que les trois propriétés $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(\bullet)}(U))$, $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ et $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(T)_{\mathbb{Q}})$ sont équivalentes (voir la preuve de 3.4.9). De plus, il est évident que si $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(\bullet)}(U))$ alors $u^!(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$. La réciproque est loin d'être claire. La raison est que pour tout objet $\mathcal{F}^{(\bullet)}$ de $\underline{LD}_{\mathbb{Q}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(\bullet)}(U))$, la propriété que $\varinjlim (\mathcal{F}^{(\bullet)}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$ n'implique pas en général que $\mathcal{F}^{(\bullet)} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(\bullet)}(U))$. Lorsque \mathcal{E} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent, nous nous intéressons dans ce papier à cette réciproque. Nous prouvons en particulier que si les espaces de cohomologies de $u^!(\mathcal{E})$ sont des isocristaux sur Z surconvergent le long d'un diviseur de U , alors $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(\bullet)}(U))$.

Précisons à présent le contenu de ce papier. Dans le premier chapitre, nous donnons quelques préliminaires topologiques concernant les K -espaces topologiques localement convexes. Nous rappelons notamment la définition des espaces de type LB et nous reprenons quelques points sur les produits tensoriels complétés de modules localement convexes dans le contexte qui nous sera utile dans la suite de ce travail. Dans le deuxième chapitre, nous munissons naturellement les isocristaux surconvergentes et le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes d'une structure canonique d'espace de type LB. Après quelques propriétés topologiques sur les foncteurs images directes et images inverses extraordinaire par une immersion fermée, nous établissons le résultat principal de ce papier dans le dernier chapitre décrit en début d'introduction.

Remerciement

Je remercie Tomoyuki Abe pour ses commentaires concernant le fait que les \mathcal{D} -modules arithmétiques cohérents sont de type LB.

Notations

Dans ce papier, on désigne par \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, k son corps résiduel supposé parfait, K son corps des fractions et π une uniformisante. Les faisceaux seront notés par des lettres calligraphiques, leurs sections globales par la lettre droite associée. Les modules sont par défaut à gauche. On notera avec des chapeaux les complétions p -adiques et si \mathcal{E} est un faisceau en groupes abéliens alors on posera $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Soient \mathcal{A} un faisceau d'anneaux sur un espace topologique X . Si $*$ est l'un des symboles $+$, $-$, ou b , $D^*(\mathcal{A})$ désigne

la catégorie dérivée des complexes de \mathcal{A} -modules (à gauche) vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsque l'on souhaite préciser entre droite et gauche, on précise alors comme suit $D^*({}^g\mathcal{A})$ ou $D^*(\mathcal{A}^d)$. On note $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ des complexes à cohomologie cohérente et bornée. On suppose (sans nuire à la généralité) que tous les k -schémas sont réduits et on pourra confondre les diviseurs avec leur support. Les \mathcal{V} -schémas formels seront indiqués par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par la lettre droite correspondante.

1 Préliminaires topologiques

Notons \mathfrak{C} la catégorie des K -espaces vectoriels topologiques localement convexes. Notons \mathfrak{D} la sous-catégorie pleine de \mathfrak{C} des K -espaces séparés et complets. On remarque qu'un morphisme surjectif $V \rightarrow V''$ de \mathfrak{C} est le conoyau de son noyau dans \mathfrak{C} si et seulement si V'' est muni de la topologie quotient.

1.1 Espaces de type LB .

Nous agglomérons ce dont nous aurons besoin sur les K -espaces de type LB , surtout du lemme 1.1.7 mais aussi de sa preuve (voir l'étape 2 de la preuve de 3.4.6).

1.1.1. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant de \mathfrak{C} . Posons $V := \varinjlim_i V_i$ la limite inductive calculée dans \mathfrak{C} . En tant que K -espace vectoriel, V est la limite inductive de $(V_i)_{i \in I}$ calculée dans la catégorie des K -espaces vectoriels. La topologie localement convexe sur V est la plus fine rendant continue tous les morphismes canoniques $V_i \rightarrow V$.

Remarques 1.1.2. Soient $(V_i)_{i \in I}$ et $(W_i)_{i \in I}$ deux systèmes inductifs filtrants de \mathfrak{C} , $f_i: V_i \rightarrow W_i$ une famille compatible de morphismes de \mathfrak{C} et $f: \varinjlim_i V_i \rightarrow \varinjlim_i W_i$ le morphisme de \mathfrak{C} induit par passage à la limite inductive. Si pour tout i l'image de f_i est dense dans W_i alors l'image de f est dense.

En effet, si F est un fermé de $\varinjlim_i W_i$ contenant l'image de f , alors l'image inverse de F sur W_i est un fermé contenant l'image de f_i qui est dense dans W_i . La flèche canonique $W_i \rightarrow \varinjlim_i W_i$ se factorise donc toujours via $W_i \rightarrow F$. D'où $F = \varinjlim_i W_i$.

Lemme 1.1.3. Soient $(V_i)_{i \in I}$ et $(W_i)_{i \in I}$ deux systèmes inductifs filtrants de \mathfrak{C} , $f_i: V_i \rightarrow W_i$ une famille compatible de morphismes surjectifs, stricts de \mathfrak{C} et $f: \varinjlim_i V_i \rightarrow \varinjlim_i W_i$ le morphisme de \mathfrak{C} induit par passage à la limite inductive. Alors f est un morphisme surjectif strict.

Démonstration. La surjectivité de f est déjà connue. Posons $W := \varinjlim_i W_i$. Comme le morphisme f est continu et surjectif, la propriété que f soit strict est alors équivalente à la propriété suivante : tout morphisme $g: W \rightarrow W'$ tel que $g \circ f$ soit continu est lui-même continu. Soit $g: W \rightarrow W'$ tel que $g \circ f$ soit continu. Notons $g_i: W_i \rightarrow W'$ le composé du morphisme canonique $W_i \rightarrow W$ avec g . Comme f_i est surjectif et strict, comme $g_i \circ f_i: V_i \rightarrow W'$ est continu (car composé de $V_i \rightarrow V$ avec $g \circ f$), les morphismes g_i sont alors continus. D'après la propriété universelle de la limite inductive, g est donc aussi continu. \square

Lemme 1.1.4. Soient $(V_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant de \mathfrak{C} et J une partie cofinale de I . L'isomorphisme K -linéaire canonique $\varinjlim_{j \in J} V_j \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i \in I} V_i$ est alors un homéomorphisme.

Démonstration. Les morphismes canoniques K -linéaires et continues $\varinjlim_{j \in J} V_j \rightarrow \varinjlim_{i \in I} V_i$ et $\varinjlim_{i \in I} V_i \rightarrow \varinjlim_{j \in J} V_j$ commutent au foncteur « oubli de la topologie ». Ce sont donc des bijections. \square

Définition 1.1.5. Un K -espace de type LB est un K -espace localement convexe séparé V tel qu'il existe, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, des morphismes continus de K -espaces de Banach $V_m \rightarrow V_{m+1}$ et un homéomorphisme de la forme $\varinjlim_m V_m \xrightarrow{\sim} V$.

Remarques 1.1.6. Dans la définition de K -espace de type LB de 1.1.5 et avec ses notations, il n'est pas restrictif de supposer que les morphismes $V_m \rightarrow V_{m+1}$ soit injectifs. En effet, si on note $j_m: V_m \rightarrow V$, $W_m := V_m / \ker j_m$ muni de la topologie quotient, topologie qui en fait un K -espace de Banach (car V est séparé donc W_m est un quotient séparé d'un K -espace de Banach), on vérifie par propriété universelle que les morphismes K -linéaires canoniques réciproques $\varinjlim_m V_m \rightarrow \varinjlim_m W_m$ et $\varinjlim_m W_m \rightarrow \varinjlim_m V_m$ sont continus.

Lemme 1.1.7. *Un quotient séparé d'un espace de type LB est un espace de type LB.*

Démonstration. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, donnons-nous des monomorphismes continues de K -espaces de Banach $V_m \rightarrow V_{m+1}$. On note $V := \varinjlim_m V_m$ et $i_m: V_m \hookrightarrow V$ les monomorphismes continues canoniques. Soit $G := V/W$ un quotient de V qui soit séparé. Notons $G^{(m)} := V_m/i_m^{-1}(W)$ muni de la topologie quotient, i.e. telle que la surjection canonique $\pi_m: V_m \twoheadrightarrow G^{(m)}$ soit stricte. Notons $j_m: G^{(m)} \rightarrow G$ l'injection canonique. Comme $j_m \circ \pi_m$ est continu, comme π_m est strict, j_m est donc continu. Comme G est séparé, il en est alors de même de $G^{(m)}$. Ainsi $G^{(m)}$ est un K -espace de Banach. Il découle de 1.1.3 que le morphisme de gauche du diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_m G^{(m)} & \xrightarrow{\sim} & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ \varinjlim_m V_m & \xrightarrow{\sim} & V, \end{array} \quad (1.1.7.1)$$

est un épimorphisme strict. Comme il en est de même du morphisme de droite, comme l'isomorphisme du bas est un homéomorphisme, il en est donc de même de l'isomorphisme du haut. \square

1.2 Topologie projective d'un produit tensoriel sur une K -algèbre

Soit D une K -algèbre (sans topologie et non nécessaire commutative) telle que K soit dans le centre de D . Notons $\mathfrak{C}_{D,g}$ (resp. $\mathfrak{C}_{D,d}$) la sous-catégorie pleine de \mathfrak{C} des objets de \mathfrak{C} tels que la structure de K -espace vectoriel se prolonge en une structure de D -module à gauche (resp. à droite).

1.2.1 (Application D -balancée continue et complétion). Soient V un objet de $\mathfrak{C}_{D,d}$, W un objet de $\mathfrak{C}_{D,g}$ et U un objet de \mathfrak{C} . On munit $V \times W$ de la topologie produit, i.e. $V \times W$ est le produit calculé dans \mathfrak{C} . Soit $\beta: V \times W \rightarrow U$ une application D -balancée. Par K -bilinearité de β , si L est un sous- \mathcal{V} -module (resp. un réseau de U au sens de [Sch02, 2.1]) de U , alors $\phi^{-1}(L)$ est un sous- \mathcal{V} -module (resp. un réseau) de $V \times W$. De plus, d'après [Sch02, 17.1], comme β est K -bilineaire, l'application β est continue si et seulement si elle l'est en zéro, i.e., pour tout sous- \mathcal{V} -module ouvert de L de U , il existe des sous- \mathcal{V} -modules ouverts respectivement M de V et N de W tels que $\beta(M \times N) \subset L$.

Supposons β continue. On dispose alors du morphisme K -bilineaire $\varprojlim_{M,N} V \times W / M \times N \rightarrow \varprojlim_L V / L$, où L (resp. M , resp. N) parcourt les réseaux ouverts de U (resp. V , resp. W). On note $\hat{\beta}: \hat{V} \times \hat{W} \rightarrow \hat{U}$, cette application. Comme les réseaux ouverts de \hat{U} sont de la forme $\varprojlim_L L_0 / L$ où L_0 est un réseau ouvert de U et L parcourt les réseaux ouverts de U inclus dans L_0 (et de même pour $\hat{V} \times \hat{W}$), on vérifie alors que $\hat{\beta}$ est continue. Comme l'image de $V \times W$ dans $\hat{V} \times \hat{W}$ est dense, on vérifie que $\hat{\beta}$ est l'unique application K -bilineaire continue induisant le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{V} \times \hat{W} & \xrightarrow{\hat{\beta}} & \hat{U} \\ \uparrow & & \uparrow \\ V \times W & \xrightarrow{\beta} & U. \end{array} \quad (1.2.1.1)$$

Par contre, pour que $\hat{\beta}$ soit D -balancée, il faut des hypothèses topologiques sur D (voir 1.3.4).

1.2.2. Soient V un objet de $\mathfrak{C}_{D,d}$ et W un objet de $\mathfrak{C}_{D,g}$. En munissant $V \times W$ de la topologie produit, la topologie projective sur le produit tensoriel $V \otimes_D W$ est la topologie K -localement convexe la plus fine telle que le morphisme K -bilineaire canonique $\rho_{V,W}: V \times W \rightarrow V \otimes_D W$ soit continue. Ainsi, un réseau $L \subset V \otimes_D W$ est ouvert si et seulement si $\rho_{V,W}^{-1}(L)$ est ouvert. Comme nous ne considérerons que des topologies de type projectif sur les produits tensoriels, nous pourrions omettre d'indiquer le qualificatif « projectif ».

L'objet $V \otimes_D W$ vérifie la propriété universelle : pour toute application D -balancée et continue de la forme $\phi: V \times W \rightarrow U$, il existe un unique morphisme dans \mathfrak{C} de la forme $\theta: V \otimes_D W \rightarrow U$ tel que $\theta \circ \rho_{V,W} = \phi$.

On en déduit que l'on obtient en fait le bifoncteur canonique

$$- \otimes_D - : \mathfrak{C}_{D,d} \times \mathfrak{C}_{D,g} \rightarrow \mathfrak{C}.$$

Lemme 1.2.3. Soient V un objet de $\mathfrak{C}_{D,d}$ et W un objet de $\mathfrak{C}_{D,g}$. On suppose qu'il existe un sous- \mathcal{V} -module V_0 de V (resp. W_0 de W) tel qu'une base de voisinages de zéro de V (resp. W) soit donnée par la famille $(p^n V_0)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(p^n W_0)_{n \in \mathbb{N}}$). Notons $U_0 := \langle \rho_{V,W}(V_0 \times W_0) \rangle$, où $\langle ? \rangle$ désigne le « sous \mathcal{V} -module de $V \otimes_D W$ engendré par ? ». Alors une base de voisinages sur $V \otimes_D W$ muni de sa topologie canonique (voir 1.2.2) est donnée par $(p^n U_0)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Comme V_0 et W_0 sont des réseaux respectifs de V et W , U_0 est un réseau de U . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, comme $\rho_{V,W}^{-1}(p^n U_0) \supset p^n(V_0 \times W_0)$, les $p^n U_0$ sont donc des ouverts de $V \otimes_D W$. Réciproquement, soit L un sous- \mathcal{V} -module ouvert de $V \otimes_D W$. Il existe alors un entier n assez grand tel que $\rho_{V,W}^{-1}(L) \supset p^n(V_0 \times W_0)$. Comme L est un \mathcal{V} -module, on a alors $L \supset \langle \rho_{V,W}(p^n(V_0 \times W_0)) \rangle = p^{2n} \langle \rho_{V,W}(V_0 \times W_0) \rangle = p^{2n} U_0$. □

1.2.4. Soit $D' \rightarrow D$ est un homomorphisme de K -algèbres tel que K soit aussi dans le centre de D' . Soient V un objet de $\mathfrak{C}_{D,d}$ et W un objet de $\mathfrak{C}_{D,g}$. Comme le composé $V \times W \rightarrow V \otimes_{D'} W \rightarrow V \otimes_D W$ est le morphisme canonique, par définition des topologies définies sur $V \otimes_{D'} W$ et $V \otimes_D W$, l'épimorphisme $V \otimes_{D'} W \rightarrow V \otimes_D W$ est donc strict.

Lemme 1.2.5. Soient $V \rightarrow V''$ (resp. $W \rightarrow W''$) un épimorphisme strict de $\mathfrak{C}_{D,d}$ (resp. W un objet de $\mathfrak{C}_{D,g}$). Les épimorphismes $V \otimes_D W \rightarrow V \otimes_D W''$ et $V \otimes_D W \rightarrow V'' \otimes_D W$ sont alors stricts.

Démonstration. Par symétrie, vérifions-le seulement pour le premier. Soit L un réseau de $V \otimes_D W''$. Comme $V \times W \rightarrow V \times W''$ est strict, par définition de la topologie sur $V \otimes_D W''$, L est ouvert si et seulement si son image inverse sur $V \times W$ est un ouvert. Par définition de la topologie sur $V \otimes_D W$, cela équivaut au fait que son image inverse sur $V \otimes_D W$ soit un ouvert. D'où le résultat. □

Nous ne devrions pas avoir besoin des deux lemmes qui suivent mais cela vaut sans-doute la peine de l'écrire :

Lemme 1.2.6. Soient $(V_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant de $\mathfrak{C}_{D,d}$, $(W_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant de $\mathfrak{C}_{D,g}$, U un objet de \mathfrak{C} , $\beta_i : V_i \times W_i \rightarrow U$ une famille compatible d'applications D -balancées continues. Alors l'application D -balancée $\beta := \varinjlim_i V_i \times W_i \rightarrow U$ est continue.

Démonstration. Notons $g_i : V_i \times W_i \rightarrow \varinjlim_i V_i \times W_i$ les applications D -balancées continues canoniques. Soit L un réseau ouvert de U . Le lemme découle alors de l'égalité $\beta^{-1}(L) = \sum_{i \in I} g_i(\beta_i^{-1}(L))$. □

Lemme 1.2.7. Soient $(V_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant de $\mathfrak{C}_{D,d}$ et W un objet de $\mathfrak{C}_{D,g}$.

1. Le morphisme canonique $\varinjlim_i (V_i \times W) \rightarrow (\varinjlim_i V_i) \times W$ est un homéomorphisme.
2. On dispose alors de l'isomorphisme canonique dans \mathfrak{C} de la forme

$$\varinjlim_i (V_i \otimes_D W) \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_i V_i) \otimes_D W.$$

Démonstration. Notons $V := \varinjlim_i V_i$ et $f_i : V_i \rightarrow V$ les morphismes canoniques. Traitons d'abord la première assertion. Par définition de la topologie sur la limite inductive, la bijection canonique $\varinjlim_i (V_i \times W) \rightarrow V \times W$ est continue. Soient $(L_i)_{i \in I}$ une famille de réseaux ouverts de $(V_i)_{i \in I}$ et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de réseaux ouverts de W . Il s'agit de vérifier que $\sum_{i \in I} f_i(L_i) \times M_i$ est un ouvert de $V \times W$. Cela résulte immédiatement de l'inclusion $\sum_{i \in I} f_i(L_i) \times M_i \supset (\sum_{i \in I} f_i(L_i)) \times M_{i_0}$ valable quelque que soit $i_0 \in I$ (en effet, on utilise la relation $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ pour $x \in \sum_{i \in I} f_i(L_i)$ et $y \in M_{i_0}$).

Vérifions à présent la seconde assertion, i.e. le K -espace localement convexe $V \otimes_D W$ vérifie la propriété universelle de la limite inductive dans \mathfrak{C} du système $(V_i \otimes_D W)_{i \in I}$: si on se donne une famille compatible de morphismes de \mathfrak{C} de la forme $V_i \otimes_D W \rightarrow U$, alors ils se factorisent de manière unique en un morphisme K -linéaire de la forme $V \otimes_D W \rightarrow U$. Pour vérifier que celui-ci est continue, il faut et il suffit que le composé $V \times W \rightarrow V \otimes_D W \rightarrow U$ l'est. Or, comme toutes les applications D -balancées $V_i \times W \rightarrow U$ sont continues, d'après 1.2.6, il en est de même de l'application D -balancée $\varinjlim_i (V_i \times W) \rightarrow U$. On déduit alors de la première assertion du lemme que le morphisme canonique $V \times W \rightarrow U$ est continu. D'où le résultat. □

1.3 Complétions de produit tensoriel de modules localement convexes

1.3.1. Avec les notations de 1.2, soient V un objet de $\mathfrak{C}_{D,d}$ et W un objet de $\mathfrak{C}_{D,g}$. On note $V \widehat{\otimes}_D W$ le séparé complété de $V \otimes_D W$ et $i_{V,W} : V \otimes_D W \rightarrow V \widehat{\otimes}_D W$ le morphisme canonique. Il résulte de la propriété universelle du produit tensoriel et de celle du séparé complété la propriété universelle suivante : pour toute application D -balancée et continue de la forme $\phi : V \times W \rightarrow U$ avec $U \in \mathfrak{D}$, il existe alors un unique morphisme dans \mathfrak{D} de la forme $\theta : V \widehat{\otimes}_D W \rightarrow U$ tel que $\theta \circ i_{V,W} \circ \rho_{V,W} = \phi$.

On obtient ainsi le bifoncteur canonique

$$-\widehat{\otimes}_D - : \mathfrak{C}_{D,d} \times \mathfrak{C}_{D,g} \rightarrow \mathfrak{D}.$$

Définition 1.3.2. Soit D une K -algèbre telle que K soit dans le centre de D .

1. On dit que D est une K -algèbre localement convexe, si D est muni d'une topologie K -localement convexe telle que la multiplication soit une application K -bilinéaire continue. Un morphisme de K -algèbres localement convexes est un morphisme de K -algèbres qui est continu pour les topologies respectives. On dit que D est un K -algèbre de Banach si D est une K -algèbre localement convexe dont la topologie sous-jacente en fait un K -espace de Banach.
2. Soit D une K -algèbre localement convexe. Un D -module à gauche localement convexe est un D -module à gauche M muni d'une topologie K -localement convexe telle que la loi externe structurale $D \times M \rightarrow M$ soit une application K -bilinéaire continue. Un D -module à gauche de Banach est un D -module à gauche localement convexe dont la topologie sous-jacente en fait un K -espace de Banach. Un morphisme de D -modules à gauche localement convexes (resp. de Banach) est un morphisme de D -modules à gauche qui est aussi un morphisme de K -espaces localement convexe (resp. de Banach).

De même en remplaçant à gauche par à droite.

Lemme 1.3.3. Soient D une K -algèbre localement convexe, $\phi : M \rightarrow N$ un morphisme de D -modules à gauche (resp. à droite) localement convexes.

1. La structure de K -espace localement convexe séparé complet sur \widehat{D} se prolonge en une structure canonique de K -algèbre localement convexe. De plus, le morphisme canonique $D \rightarrow \widehat{D}$ est un morphisme de K -algèbres localement convexes.
2. Le morphisme induit par séparée complétion $\widehat{\phi} : \widehat{M} \rightarrow \widehat{N}$ est un morphisme de \widehat{D} -modules localement convexes. De plus, le morphisme canonique $M \rightarrow \widehat{M}$ est un morphisme de D -modules localement convexes.

Démonstration. Contentons-nous de prouver le cas non respectif. D'après 1.2.1.1, l'application K -bilinéaire continue structurale canonique $\mu_D : D \times D \rightarrow D$ induit l'application K -bilinéaire continue $\mu_{\widehat{D}} := \widehat{\mu}_D : \widehat{D} \times \widehat{D} \rightarrow \widehat{D}$ s'inscrivant (de manière unique) dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{D} \times \widehat{D} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{D}}} & \widehat{D} \\ \uparrow & & \uparrow \\ D \times D & \xrightarrow{\mu_D} & D. \end{array} \quad (1.3.3.1)$$

Comme les deux applications $\mu_{\widehat{D}} \circ (\mu_{\widehat{D}} \times id)$, $\mu_{\widehat{D}} \circ (id \times \mu_{\widehat{D}}) : \widehat{D} \times \widehat{D} \times \widehat{D} \rightarrow \widehat{D}$ coïncident après composition par le morphisme canonique $D \times D \times D \rightarrow \widehat{D} \times \widehat{D} \times \widehat{D}$ dont l'image est dense, on obtient $\mu_{\widehat{D}} \circ (\mu_{\widehat{D}} \times id) = \mu_{\widehat{D}} \circ (id \times \mu_{\widehat{D}})$, i.e. la multiplication est associative. On vérifie de même les autres propriétés qui font de \widehat{D} une K -algèbre localement convexe. Il est clair que le morphisme continu canonique $D \rightarrow \widehat{D}$ est alors un morphisme de K -algèbres localement convexes.

D'après 1.2.1, les applications K -bilinéaires continues structurales canoniques $\mu_M : D \times M \rightarrow M$ et $\mu_N : D \times N \rightarrow N$ induisent les applications K -bilinéaires continues $\mu_{\widehat{M}} := \widehat{\mu}_M : \widehat{D} \times \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ et $\mu_{\widehat{N}} := \widehat{\mu}_N : \widehat{D} \times \widehat{N} \rightarrow \widehat{N}$. De même, on

vérifie que $\mu_{\widehat{M}}$ et $\mu_{\widehat{N}}$ induisent respectivement une structure canonique de \widehat{D} -module localement convexe sur \widehat{M} et \widehat{N} . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{D} \times \widehat{M} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{M}}} & \widehat{M} \\ \downarrow id \times \widehat{\phi} & & \downarrow \widehat{\phi} \\ \widehat{D} \times \widehat{N} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{N}}} & \widehat{N} \end{array}$$

est commutatif après composition par $D \times M \rightarrow \widehat{D} \times \widehat{M}$ dont l'image est dense, celui-ci est commutatif. D'où le résultat. \square

Lemme 1.3.4. Soient D une K -algèbre localement convexe, M un D -module à droite localement convexe, N un D -module à gauche localement convexe et U un K -espace localement convexe. Soit $\beta: M \times N \rightarrow U$ une application D -balancée et continue. L'application $\widehat{\beta}: \widehat{M} \times \widehat{N} \rightarrow \widehat{U}$ (voir 1.2.1) est alors une application \widehat{D} -balancée et continue.

Démonstration. On sait déjà que l'application $\widehat{\beta}$ est continue. Considérons le carré :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M} \times \widehat{D} \times \widehat{N} & \xrightarrow{\mu_{\widehat{M}} \times id} & \widehat{M} \times \widehat{N} \\ \downarrow id \times \mu_{\widehat{N}} & & \downarrow \widehat{\beta} \\ \widehat{M} \times \widehat{N} & \xrightarrow{\widehat{\beta}} & \widehat{U}, \end{array} \quad (1.3.4.1)$$

où $\mu_{\widehat{M}}: \widehat{M} \times \widehat{D} \rightarrow \widehat{M}$ et $\mu_{\widehat{N}}: \widehat{D} \times \widehat{N} \rightarrow \widehat{N}$ sont les applications K -bilinéaires continues structurales canoniques. Comme l'image de $M \times D \times N$ dans $\widehat{M} \times \widehat{D} \times \widehat{N}$ est dense, le carré 1.3.4.1 est donc commutatif car il l'est sans les chapeaux. \square

Proposition 1.3.5. Soient D une K -algèbre localement convexe, M un D -module à droite localement convexe et N un D -module à gauche localement convexe. On dispose alors de l'isomorphisme canonique dans \mathfrak{D} de la forme :

$$M \widehat{\otimes}_D N \xrightarrow{\sim} \widehat{M} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}} \widehat{N}.$$

Démonstration. Par fonctorialité du foncteur séparée complétion, on dispose du morphisme dans \mathfrak{D} de la forme : $M \widehat{\otimes}_D N \rightarrow \widehat{M} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}} \widehat{N}$. Pour construire le morphisme quasi-inverse, par propriété universelle du produit tensoriel, il s'agit de définir canoniquement une application continue de la forme $\widehat{M} \times \widehat{N} \rightarrow M \widehat{\otimes}_D N$ qui soit \widehat{D} -balancée, ce qui résulte aussitôt du lemme 1.3.4 appliqué à β égal à l'application canonique $M \times N \rightarrow M \otimes_D N$. \square

2 Espaces de type LB en théorie des D -modules arithmétiques

Sauf mention explicite du contraire, nous utiliserons les notations et hypothèses suivantes : soit \mathfrak{X} un \mathcal{V} -schéma formel affine, lisse, muni de coordonnées locales t_1, \dots, t_d et soient $\partial_1, \dots, \partial_d$ les dérivations correspondantes. On note $\mathcal{Z} := \cap_{i=1}^e V(t_i)$ et $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ l'immersion fermée induite. Soient $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et $f_0 \in \mathcal{O}_X$ sa réduction modulo π telle que $T := V(f_0)$ soit un diviseur de X tel que $U := T \cap \mathcal{Z}$ soit un diviseur de \mathcal{Z} . Soit $\lambda_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application croissante telle que $\lambda_0(m) \geq m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Pour alléger les notations, on pose alors $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) := \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(\lambda_0(m))}(T)$, $\widetilde{\mathcal{B}}_Z^{(m)}(U) := \widehat{\mathcal{B}}_Z^{(\lambda_0(m))}(U)$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_Z^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_Z^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_Z} \widehat{\mathcal{D}}_Z^{(m)}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_Z} \widetilde{\mathcal{B}}_Z^{(m)}(U)$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} := \widetilde{\mathcal{B}}_Z^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_Z} \widehat{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}$.

2.1 Topologies canoniques

2.1.1 (Topologie de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe canonique (resp. de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre normée) sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$). On définit les topologies suivantes :

- Pour tout entier m , la topologie canonique de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe sur $\widetilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ est celle dont une base de voisinages de zéro est $(p^n \widetilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T))_{n \in \mathbb{N}}$.
- On munit $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ d'une topologie canonique de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe de telle manière que l'isomorphisme canonique $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_m \widetilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ soit un homéomorphisme (on remarque que d'après 1.1.4, cela ne dépend pas de λ_0).
- Comme $\cap_{n \in \mathbb{N}} p^n O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger} = \{0\}$, comme on dispose de l'isomorphisme canonique $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]_K^{\dagger}$ (voir la preuve de [Ber96, 4.3.2]), on munit alors $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ d'une structure de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -algèbre normée (à ne pas confondre avec la topologie canonique induite par la limite inductive) dont une base de voisinages de zéro est donnée par $(p^n O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger})_{n \in \mathbb{N}}$. Muni de cette topologie, $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est normée mais pas de Banach : son séparé complété est $O_{\mathfrak{X}}\{\frac{1}{f}\}_K$.
- Comme nous préférons travailler avec des K -espaces de type LB (voir le lemme 2.2.3), nous prenons par défaut la topologie canonique de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe sur $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ (définie dans le deuxième point).

- 2.1.2** (Faisceaux des opérateurs différentiels). • Pour tout entier $m \geq 0$, on munit $\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ de sa topologie canonique de $\widetilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach, i.e. les $p^n \widetilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ avec $n \in \mathbb{N}$ forment une base de voisinages de zéro. On dispose de même d'une structure canonique de $\widetilde{B}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach sur respectivement $\widetilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$, $\widetilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$ via la base de voisinages d'ouverts de zéro $(p^n \widetilde{D}_{\mathfrak{Z}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$, $(p^n \widetilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p^n \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$.
- La topologie canonique sur la $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -algèbre $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est la topologie limite inductive dans \mathfrak{C} via $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$, où les $\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ sont munis de la topologie définie ci-dessus. Une base de voisinages de zéro de $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est donc donnée par la famille $\sum_{m=0}^{\infty} p^{n_m} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$, où $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$ parcourt les suites d'entiers positifs et où l'on a noté $\sum_{m=0}^{\infty} p^{n_m} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=0}^n p^{n_m} \widetilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$.
 - De même, on définit sur $D_{\mathfrak{Z}}^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widetilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$, $\widetilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_m \widetilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_m \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$ une topologie canonique de $O_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}$ -module localement convexe. On remarque que d'après le lemme 1.1.4 on peut remplacer l'indice \mathbb{N} par un sous-ensemble cofinal sans changer la topologie.

2.1.3 (Topologie (de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module localement convexe) canonique d'un $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent). Soit E est un $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. D'après [Ber96, 3.6], il existe pour m_0 assez grand un $\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini $E^{(m_0)}$ et un isomorphisme $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme $\varepsilon : D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} E$. Pour tout entier $m \geq m_0$, posons $E^{(m)} := \widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)}$. On munit $E^{(m)}$ de la topologie canonique qui en fait un $\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de type fini de Banach (égale à la topologie quotient via un épimorphisme de la forme $(\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow E^{(m)}$). Comme pour tout m les morphismes canoniques de la forme $(\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m+1)})^r$ sont continus, on en déduit que le morphisme canonique $E^{(m)} \rightarrow E^{(m+1)}$ est continu. On munit E d'une topologie de $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent localement convexe qui fait de $\varepsilon : \varinjlim_m E^{(m)} \xrightarrow{\sim} E$ un homéomorphisme. Cela ne dépend pas du choix de $(m_0, E^{(m_0)}, \varepsilon)$. En effet, soit pour m'_0 assez grand un $\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m'_0)}$ -module de type fini $E'^{(m'_0)}$ et un isomorphisme $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme $\varepsilon' : D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m'_0)}} E'^{(m'_0)} \xrightarrow{\sim} E$. Pour $m \geq m'_0$, posons $E'^{(m)} := \widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m'_0)}} E'^{(m'_0)}$. D'après [Ber96, 3.6.2], pour m'_0 assez grand, il existe pour tout $m \geq m'_0$ des isomorphismes $\widetilde{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaires $\varepsilon_m : E'^{(m)} \xrightarrow{\sim} E^{(m)}$ tels que $\varepsilon \circ \varepsilon^{\dagger} = \varepsilon'$, avec $\varepsilon^{\dagger} := \varinjlim_m \varepsilon_m$. Or, d'après [BGR84, 3.7.3] (en effet, on remarque que la commutativité des anneaux est superflue), les ε_m sont des homéomorphismes. Par passage à la limite, on en déduit que ε^{\dagger} est un homéomorphisme. D'où la canonicité de la topologie (on utilise aussi 1.1.4).

2.1.4 (Topologie canonique d'un $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini). Soit E est un $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini. D'après [Ber96, 3.6], il existe, pour m_0 assez grand, un $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini $E^{(m_0)}$ et un isomorphisme $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme $\varepsilon: O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}} E^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} E$. Pour tout entier $m \geq m_0$, posons $E^{(m)} := \tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}} E^{(m_0)}$. On munit $E^{(m)}$ de la topologie canonique qui en fait un $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini de Banach (égale à la topologie quotient via un épimorphisme de la forme $(\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow E^{(m)}$). Comme, pour tout m , les morphismes canoniques de la forme $(\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m+1)}(T)_{\mathbb{Q}})^r$ sont continus, on en déduit que le morphisme canonique $E^{(m)} \rightarrow E^{(m+1)}$ est continu. On munit E d'une topologie de $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini localement convexe qui fait de $\varepsilon: \varinjlim_m E^{(m)} \xrightarrow{\sim} E$ un homéomorphisme. De manière analogue à 2.1.3, on vérifie que cela ne dépend pas du choix de $(m_0, E^{(m_0)}, \varepsilon)$.

Lemme 2.1.5 (Topologie canonique d'un isocrystal surconvergent). Soit E est un $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent qui est aussi un $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini pour la structure induite. La topologie sur E en tant que $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent est la même que celle en tant que $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini. On l'appellera donc topologie canonique sur l'isocrystal surconvergent E .

Démonstration. D'après [Ber96, 4.4], quitte à augmenter λ_0 , il existe pour m_0 assez grand un $\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini $E^{(m_0)}$ qui est pour la structure induite un $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini et tel que $E \xrightarrow{\sim} D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)}$. Or, d'après [Ber96, 4.1.2], la topologie canonique de $E^{(m_0)}$ en tant que $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini est la même que celle en tant que $\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini. Comme le morphisme canonique $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}(T)_{\mathbb{Q}}} E^{(m_0)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} E^{(m_0)}$ est un isomorphisme, on conclut. \square

2.2 Cas des isocristaux surconvergents

Lemme 2.2.1. Soit $\phi: E \rightarrow E'$ un morphisme de $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents (resp. de $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules de type fini). Avec E et E' munis des topologies canoniques (voir respectivement 2.1.3 et 2.1.4), le morphisme ϕ est continu.

Démonstration. D'après [Ber96, 3.6], il existe pour m_0 assez grand un morphisme de $\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -modules de type fini $\phi^{(m_0)}: E^{(m_0)} \rightarrow E'^{(m_0)}$ tel que $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \phi^{(m_0)}$ soit isomorphe à ϕ . Comme $\phi^{(m_0)}$ est continue pour les topologies canoniques (voir [BGR84, 3.7.3]), il en résulte que ϕ est continu. Le cas respectif se traite de la même manière. \square

Lemme 2.2.2. Soit $\phi: E \rightarrow E'$ un épimorphisme de $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents (resp. de $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules de type fini). Alors ϕ est un morphisme strict.

Démonstration. D'après [Ber96, 3.6], il existe pour m_0 assez grand un morphisme de $\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -modules de type fini $\phi^{(m_0)}: E^{(m_0)} \rightarrow E'^{(m_0)}$ tel que $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \phi^{(m_0)}$ soit isomorphe à ϕ . Comme $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \text{coker}(\phi^{(m_0)}) = \{0\}$, quitte à augmenter m_0 , on peut supposer que $\phi^{(m_0)}$ est surjectif. Il en est alors de même de $\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}} \phi^{(m_0)}$, pour tout entier $m \geq m_0$, ces derniers étant d'ailleurs continus et stricts pour les topologies de Banach respectives (voir [BGR84, 3.7.3, corollary 5]). Par passage à la limite, il en résulte que ϕ est strict (voir 1.1.3). Le cas respectif se traite de la même manière. \square

Lemme 2.2.3. La topologie de $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre localement convexe canonique sur $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est plus riche que celle induite par sa structure de $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre normée. Pour la topologie canonique, on en déduit que $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est une $O_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -algèbre de type LB.

Démonstration. On dispose des isomorphismes canoniques $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]_K^{\dagger}$ et $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \xrightarrow{\sim} O_{\mathfrak{X}}\{\frac{p}{f^{m+1}}\}$ (voir la preuve de [Ber96, 4.3.2]). Il en résulte le morphisme de \mathcal{V} -algèbres $\tilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \hookrightarrow O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]_K^{\dagger}$ (pour l'injectivité, voir

[Ber96, 4.3.3.(ii)]). Le morphisme canonique de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -algèbres $\widetilde{B}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est donc continu, avec $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ muni de sa topologie de $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -algèbre normée. En passant à la limite, on en déduit le résultat. \square

Lemme 2.2.4. *Soit $I \subset (O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ un monomorphisme de $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules. Alors I est fermé dans $(O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ pour la topologie induite par la topologie canonique de $(O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$.*

Démonstration. Notons $M := (O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r / I$ et M_0 l'image du morphisme composé $(O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger})^r \subset (O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \twoheadrightarrow M$. Munissons M de la topologie quotient (pour la topologie canonique de $(O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$). Il s'agit ainsi de vérifier que M est séparé pour cette topologie. Or, comme pour tout entier n le \mathcal{V} -module $p^n(O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger})^r$ est un ouvert de $(O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ (voir 2.2.3), le \mathcal{V} -module $p^n M_0$ est alors un ouvert de M . En outre, comme $O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger}$ est noethérien et comme $O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger} \rightarrow O_{\mathfrak{X}}\{\frac{1}{f}\}$ est fidèlement plat, comme M_0 est un $O_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger}$ -module de type fini, alors M_0 est séparé pour la topologie p -adique (voir [Mat89, Théorèmes 8.10 et 8.12]), i.e. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n M_0 = \{0\}$. Il en résulte que M est séparé. \square

Proposition 2.2.5. *Les $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules de type fini sont des $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules de type LB pour la topologie canonique. De plus, les sous- $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules d'un $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini M sont fermés dans M pour la topologie canonique de M .*

Démonstration. Soit M un $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini muni de sa topologie canonique. Il existe un épimorphisme de $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules de la forme $(O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \twoheadrightarrow M$. D'après 2.2.2, ce morphisme est strict pour les topologies canoniques respectives. Il résulte alors de 2.2.4 que M est séparé et donc M est un $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module de type LB. Si M' est un sous- $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module de M , alors, grâce à 2.2.2, le module M/M' est séparé pour la topologie quotient induite par M . D'où le résultat. \square

Remarques 2.2.6. Soit $I \subset (D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ un sous- $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Soit $J \subset (O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$ un sous- $O_{\mathfrak{X}}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module. Il n'est pas clair que ces inclusions soient stricts pour les topologies canoniques respectives ni que I soit fermé dans $(D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r$. Cependant, d'après une communication de Tomoyuki Abe, les $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents sont aussi des espaces de type LB.

2.3 Cas du faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes

Proposition 2.3.1. *Soit $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels affines et lisses. Soit ϕ un morphisme $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire à gauche de la forme $\phi: (D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$. Soit ψ un morphisme $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire à droite de la forme $\psi: (D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s$. Notons $u_g^*(\phi): (D_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})^r \rightarrow (D_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})^s$ et $u_d^*(\psi): (D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{\dagger})^r \rightarrow (D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{\dagger})^s$ les morphismes $D_{\mathcal{Z}}^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaires induits par fonctorialité. Les morphismes ϕ , $u_g^*(\phi)$, $u_d^*(\psi)$ sont continus pour les topologies canoniques respectives (voir les définitions de 2.1.2).*

Démonstration. 1) La continuité de ϕ résulte du lemme 2.2.1.

2) Vérifions à présent que $u_g^*(\phi)$ est continu. Notons π les morphismes $O_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -linéaires surjectifs de la forme $\pi: (D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^n \twoheadrightarrow (D_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})^n$, pour un certain entier positif n . Comme $u_g^*(\phi) \circ \pi = \pi \circ \phi$, il suffit d'établir que π est un morphisme continu et strict. Comme la surjection canonique $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \widetilde{D}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ envoie $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ sur $\widetilde{D}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$, celle-ci est donc continue. D'après le théorème de l'application ouverte de Banach, ce morphisme surjectif et continu de K -espaces de Banach est donc strict. Il découle alors du lemme 1.1.3 qu'il en est de même par passage à la limite sur le niveau de π .

3) On procède de même que pour l'étape 2) pour valider la continuité de $u_d^*(\psi)$. \square

Proposition 2.3.2. *Soit $(N_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Le K -espace localement convexe $\varinjlim_m \widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(N_m)}$ (muni de la topologie limite inductive dans la catégorie des K -espaces localement convexes) est un espace de type LB.*

Démonstration. D'après 1.1.4, il suffit de traiter le cas où $N_m = m$. Comme les K -espaces $\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ sont de Banach, il s'agit de vérifier la séparation de $\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$. Notons L le sous- \mathcal{V} -module de $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ des éléments qui s'écrivent sous la forme $\sum_{k \in \mathbb{N}^d} a_k \underline{\partial}^{[k]}$ avec $a_k \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{f}]^{\dagger}$ (on demande bien sûr que la série converge dans $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$). Or, comme $p^n L \supset p^n D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T) = \sum_{k=0}^{\infty} p^n \tilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$, alors $p^n L$ est un ouvert de $D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ pour tout entier n . Par unicité de l'écriture sous la forme $\sum_{k \in \mathbb{N}^d} a_k \underline{\partial}^{[k]}$ des éléments de L , on vérifie que $\cap_{n \in \mathbb{N}} p^n L = \{0\}$. On obtient donc la séparation voulue. \square

Proposition 2.3.3. *Les topologies canoniques sont celles définies en 2.1.2.*

1. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, soient $V^{(m)}$ un $D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module à gauche localement convexe et $V^{(m)} \rightarrow V^{(m+1)}$ un morphisme continu. Soient $(N_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(N'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ deux suites strictement croissantes d'entiers positifs. Avec les notations de 1.3.1, l'isomorphisme canonique

$$\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(N'_m)} \widehat{\otimes}_{D_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}} V^{(N_m)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{D_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}} V^{(m)}. \quad (2.3.3.1)$$

est alors un homéomorphisme.

2. Les K -espaces localement convexes $\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(N_m)}$ et $\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{D_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}} \tilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ sont des K -espaces de type LB.

Démonstration. On résout la première assertion de manière analogue à 1.1.4. Pour la seconde assertion, on procède de manière analogue à 2.3.2. \square

3 Préservation de la cohérence par foncteur cohomologique local

Soient $u: \mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels séparés, quasi-compacts et lisses, T un diviseur de X tel que $U := T \cap \mathfrak{Z}$ soit un diviseur de Z . Soit $\lambda_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application croissante telle que $\lambda_0(m) \geq m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Pour alléger les notations, on pose alors $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) := \tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(\lambda_0(m))}(T)$, $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U) := \tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{Z}}^{(\lambda_0(m))}(U)$, $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} := \tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$, $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z}}^{(m)} := \tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}$, $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}} \tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)$, $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} := \tilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$, $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}$.

3.1 Images inverses par une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels affines et lisses

On suppose dans cette section que \mathfrak{X} est affine.

Lemme 3.1.1 (Théorèmes A et B). *Les morphismes canoniques $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \tilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \rightarrow D_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ sont des isomorphismes.*

De plus, pour tout entier $q \geq 1$, $H^q(\mathfrak{Z}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}) = 0$, $H^q(\mathfrak{Z}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}) = 0$ et $H^q(\mathfrak{Z}, \mathcal{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}) = 0$.

Démonstration. Comme le foncteur $\Gamma(\mathfrak{Z}, -)$ commute aux limites projectives, on vérifie que le morphisme canonique $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \tilde{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$ est un isomorphisme. Comme le foncteur $\Gamma(\mathfrak{Z}, -)$ et le produit tensoriel commutent à la tensorisation par \mathbb{Q} (car \mathfrak{Z} est noethérien) et aux limites inductives filtrantes de faisceaux sur \mathfrak{Z} , on en déduit les deux autres isomorphismes.

On procède de même pour les annulations, les propriétés satisfaites par le foncteur $\Gamma(\mathfrak{Z}, -)$ que l'on a utilisées étant toujours valables pour les foncteurs dérivés $H^q(\mathfrak{Z}, -)$ (voir [Ber96, 3.3.2, 3.4.0.1 et 3.6.5]). \square

Notations 3.1.2 (Images inverses dérivées gauches). Soit $E^{(m)}$ un $\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent à gauche. On pose $\mathcal{E}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$, $E := D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$ et $\mathcal{E} := D_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$. On définit les foncteurs images inverses

dérivées gauches $\mathbb{L}u^*$ en posant $\mathbb{L}u^*(E^{(m)}) := \widetilde{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} E^{(m)}$, $\mathbb{L}u^*(\mathcal{E}^{(m)}) := \widetilde{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \mathcal{E}^{(m)}$, $\mathbb{L}u^*(E) := D_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}}^\mathbb{L} E$ et $\mathbb{L}u^*(\mathcal{E}) := \mathcal{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}}^\mathbb{L} \mathcal{E}$. On remarque que les notations sont justifiées par le lemme 3.1.1 et correspondent aux foncteurs $\mathbb{L}u^*$ calculés dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -modules ou $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -modules. Enfin, d'après les théorèmes de type A, tous les $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents et les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules cohérents sont de cette forme (voir respectivement [Ber96, 3.4 et 3.6.5]).

De même, en remplaçant $?_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ par $?_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}$, on définit le foncteur $\mathbb{L}u^*$ pour les modules à droite. Par exemple, si $E^{(m)}$ un $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent à droite, on pose $\mathbb{L}u^*(E^{(m)}) := E \otimes_{\widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$. Enfin, si on veut préciser que l'on a affaire à des modules à gauche (resp. à droite), on pourra noter $\mathbb{L}u_g^*$ (resp. $\mathbb{L}u_d^*$) à la place de $\mathbb{L}u^*$.

Lemme 3.1.3. *Avec les notations et hypothèses de 3.1.2, on dispose alors des isomorphismes canoniques*

$$\mathbb{L}u^*(E^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(Z, \mathbb{L}u^*(\mathcal{E}^{(m)})), \quad \mathbb{L}u^*(E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(Z, \mathbb{L}u^*(\mathcal{E})). \quad (3.1.3.1)$$

Démonstration. Le premier se traitant de manière analogue, contentons-nous de vérifier le dernier isomorphisme. Soit P^\bullet une résolution gauche de E par des $D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules libres de type fini. Le complexe $\mathcal{P}^\bullet := \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q} \otimes_{D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}} P^\bullet$ est alors une résolution gauche de \mathcal{E} par des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules libres de type fini. On dispose alors des isomorphismes caoniques :

$$\begin{aligned} D_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}}^\mathbb{L} E &\xleftarrow{\sim} D_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}} P^\bullet \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z, \mathcal{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}} P^\bullet) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z, \mathcal{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{u^{-1}D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}} u^{-1}P^\bullet) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(Z, \mathcal{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{u^{-1}D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}} u^{-1}P^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(Z, \mathcal{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{u^{-1}D_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}}^\mathbb{L} u^{-1}\mathcal{E}), \end{aligned} \quad (3.1.3.2)$$

l'avant-dernier isomorphisme résultant du fait que les $\mathcal{D}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules libres sont $\Gamma(Z, -)$ -acycliques (voir le lemme 3.1.1). \square

Remarques 3.1.4. Comme les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_\mathbb{Q}$ -modules cohérents (resp. les $\widetilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents) vérifient le théorème de type B (voir [Ber96, 3.6.4]), on aurait pu utiliser les résolutions de Koszul pour valider le lemme 3.1.3 ci-dessus.

3.2 Image directe de niveau m : exactitude

Pour faire des calculs en coordonnées locales, nous utiliserons les notations et hypothèses suivantes : on suppose que \mathfrak{X} est affine, muni de coordonnées locales t_1, \dots, t_d telles $Z := \cap_{i=1}^e V(t_i)$ et $u : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$ soit l'immersion fermée induite.

Notations 3.2.1. Pour tout entier $m \geq 0$, on pose $D_Z^{(m)}(U) := \widetilde{B}_Z^{(m)}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z} D_Z^{(m)}$, $D_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)}(U) := D_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \widetilde{B}_Z^{(m)}(U)$. On munit $D_Z^{(m)}(U)_\mathbb{Q}$ (resp. $D_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)}(U)_\mathbb{Q}$) d'une structure de $\widetilde{B}_Z^{(m)}(U)_\mathbb{Q}$ -algèbre normée dont une base de voisinages de zéro est donnée par la famille $(p^n D_Z^{(m)}(U))_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(p^n D_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)}(U))_{n \in \mathbb{N}}$). En d'autres termes, ce sont les topologies provenant des normes induites via les inclusions $D_Z^{(m)}(U)_\mathbb{Q} \hookrightarrow \widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$ et $D_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)}(U)_\mathbb{Q} \hookrightarrow \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$. De plus, on remarque que le séparé complété de $D_Z^{(m)}(U)_\mathbb{Q}$ (resp. $D_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)}(U)_\mathbb{Q}$) est $\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$ (resp. $\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$).

Lemme 3.2.2. *Soit $V' \xrightarrow[\phi]{} V \xrightarrow[\psi]{} V''$ une suite exacte de $\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules de Banach (voir la définition 1.3.2 et la topologie canonique de 2.1.2). On suppose de plus que ϕ et ψ sont des morphismes stricts. Les suites*

$$\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} V' \xrightarrow{id \otimes \phi} \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \xrightarrow{id \otimes \psi} \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} V'', \quad (3.2.2.1)$$

$$\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} V' \xrightarrow{id \otimes \phi} \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} V \xrightarrow{id \otimes \psi} \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} V'' \quad (3.2.2.2)$$

sont alors exactes et leurs morphismes sont stricts.

Démonstration. 1) Supposons d'abord que l'on dispose en fait de la suite exacte $0 \rightarrow V' \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} V'' \rightarrow 0$. Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^e$, en identifiant \mathbb{N}^e à un sous-ensemble de \mathbb{N}^d via l'inclusion $\underline{k} = (k_1, \dots, k_e) \mapsto (k_1, \dots, k_e, 0, \dots, 0)$, notons $\xi_{\underline{k},(m)}$ l'image de $\underline{q}^{<\underline{k}>(m)}$ via la surjection canonique $D_{\mathfrak{X}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \rightarrow D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$. Les éléments de $D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$ s'écrivent de manière unique de la forme $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k},(m)} \otimes x_{\underline{k}}$, la somme étant finie et $x_{\underline{k}} \in V$. D'après 1.2.3, si on note V_0 le sous- \mathcal{V} -module de V des éléments de norme inférieure ou égale à 1 et U_0 le sous- \mathcal{V} -module de $D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$ engendré par l'image canonique de $D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U) \times V_0 \rightarrow D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$, alors une base de voisinage de $D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$ est donnée par la famille $(p^n U_0)_{n \in \mathbb{N}}$. On en déduit que la topologie canonique sur $D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V$ est induite par la norme $\|\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k},(m)} \otimes x_{\underline{k}}\| = \max_{\underline{k}} \|x_{\underline{k}}\|$. On a la même description pour V' ou V'' à la place de V . On obtient alors la suite exacte courte de K -espaces normés

$$0 \rightarrow D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V' \rightarrow D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V \rightarrow D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V'' \rightarrow 0, \quad (3.2.2.3)$$

dont tous les morphismes sont stricts (pour celle de l'injection, c'est évident d'après la description de leur norme ; pour celle de la surjection, on peut par exemple invoquer 1.2.5 ou bien faire le calcul). Or, d'après 1.3.5, comme V est un $\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach, le morphisme canonique $D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{D_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V$ est un isomorphisme. Comme le foncteur de séparée complétion transforme les suites exactes courtes dont les applications sont des morphismes stricts de K -espaces normés en des suites exactes courtes dont les applications sont des morphismes stricts, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V' \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V'' \rightarrow 0 \quad (3.2.2.4)$$

dont les morphismes sont stricts. Comme $\tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$ est plat à gauche sur $\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$, on dispose de la même suite exacte que 3.2.2.4 où l'on remplace $\hat{\otimes}$ par \otimes . Le morphisme surjectif de cette dernière suite exacte est strict grâce à 1.2.5. Enfin, le caractère strict du morphisme injectif résulte quant à lui du fait qu'en le composant avec le monomorphisme strict $\tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V$, on obtienne encore un monomorphisme strict.

2) En décomposant les suites exactes en suites exactes courtes, on obtient le résultat. □

Lemme 3.2.3. Soient $m' \geq m$ deux entiers, V un $\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach et V' un $\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m')}$ -module de Banach (voir la définition 1.3.2). Soit $\phi: V \hookrightarrow V'$ un monomorphisme de $\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire. Le morphisme continu $\tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m')} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m')}} V'$ canoniquement induit par ϕ est alors injectif.

Démonstration. Notons $\xi_{\underline{k},(m')}$ l'image de $\underline{q}^{<\underline{k}>(m')}$ via la surjection canonique $D_{\mathfrak{X}}^{(m')}(U)_{\mathbb{Q}} \rightarrow D_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m')}(U)_{\mathbb{Q}}$. D'après la preuve de 3.2.2, le K -espace de Banach $\tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m')} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m')}} V'$ est le K -espace des éléments s'écrivant de manière unique de la forme $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k},(m')} \otimes x_{\underline{k}}$, la somme étant infinie mais la suite des éléments $x'_{\underline{k}} \in V'$ tendant vers zéro lorsque $|\underline{k}|$ tend vers l'infini. Comme $\xi_{\underline{k},(m)} = \lambda_{\underline{k},(m,m')} \xi_{\underline{k},(m')}$, pour un certain $\lambda_{\underline{k},(m,m')} \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, le morphisme $\tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}}^{(m')}(U)_{\mathbb{Q}} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m')}} V'$ envoie $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k},(m)} \otimes x_{\underline{k}}$ sur $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^e} \xi_{\underline{k},(m')} \otimes \lambda_{\underline{k},(m,m')} \phi(x_{\underline{k}})$. D'où le résultat. □

Nous n'aurons pas besoin de la proposition 3.2.4 mais elle résulte immédiatement des lemmes 3.2.2 et 3.2.3 que nous utiliserons :

Proposition 3.2.4. Soit $0 \rightarrow V' \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\psi} V''$ une suite exacte de $\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules de Banach (voir la définition 1.3.2). On suppose de plus que ϕ est un morphisme strict. La suite

$$0 \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V' \xrightarrow{id \otimes \phi} \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V \xrightarrow{id \otimes \psi} \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z},\mathbb{Q}}^{(m)}} V'' \quad (3.2.4.1)$$

est alors exacte et $\widehat{id} \otimes \phi$ est strict.

Démonstration. En munissant $W := V/V'$ de la topologie quotient, on obtient le morphisme $\widetilde{D}_{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire, injectif et continue $W \hookrightarrow V''$. On en déduit que W est un $\widetilde{D}_{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module de Banach, car il est un quotient séparé de V . On applique alors respectivement les lemmes 3.2.2 et 3.2.3 à la suite exacte $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$ et au monomorphisme $W \rightarrow V''$. \square

3.2.5. Comme $\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$ est séparé pour la topologie p -adique, le morphisme canonique $\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} \rightarrow \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$ est injectif. On munit $\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ de la topologie produit tensoriel définie dans 1.2.2, i.e. d'après le lemme 1.2.3, c'est la topologie dont une base de voisinages de zéro est donnée par la famille $p^n \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$ avec n parcourant \mathbb{N} . On munit naturellement $(\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}}$ de la topologie dont une base de voisinages de zéro est donnée par la famille $p^n \widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}$ avec n parcourant \mathbb{N} , ce qui en fait un K -espace de Banach. On obtient alors le monomorphisme strict de K -espaces normés

$$\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hookrightarrow (\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}}. \quad (3.2.5.1)$$

Par construction des séparées complétions de K -espaces localement connexes (e.g. voir la preuve de [Sch02, 7.5]), on vérifie que le morphisme 3.2.5.1 se factorise en l'isomorphisme canonique (indépendant des coordonnées locales) de K -espaces de Banach :

$$\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathbb{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widetilde{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}} \widetilde{D}_{\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}}. \quad (3.2.5.2)$$

3.3 Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré zéro

3.3.1 (Rappels). Les foncteurs $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$ et $u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)!} : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}) \rightarrow \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)})$ sont isomorphes. On dispose aussi du foncteur $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger : D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ défini de telle sorte que l'on ait l'isomorphisme de foncteurs $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \circ \varinjlim \xrightarrow{\sim} \varinjlim \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, où \varinjlim désigne le foncteur canonique $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ qui induit l'équivalence de catégories $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ (voir [Ber02, 4.2.4]).

Pour établir la proposition qui suit, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.2 (Berthelot-Kashiwara). *Soit \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent à support dans \mathbb{Z} .*

1. *Le complexe $u^!(\mathcal{E})$ est isomorphe à $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$, ce dernier étant un $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. De plus, le morphisme canonique $u_+ \circ u^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ est un isomorphisme.*
2. *Le morphisme canonique $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La première assertion est exactement la version arithmétique de Berthelot du théorème de Kashiwara. La seconde assertion étant locale, on peut supposer que nous sommes dans la situation de 3.2 dont nous reprenons les notations. Pour $i = 1, \dots, e$, notons $\mathbb{Z}_i := V(t_i)$. Comme $\mathcal{E}(\dagger \mathbb{Z}_i)$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger \mathbb{Z}_i \cup T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent nul en dehors de \mathbb{Z}_i , ce dernier est nul. De même, pour $1 \leq i, j \leq e$, comme $\mathcal{E}(\dagger \mathbb{Z}_i \cup \mathbb{Z}_j)$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger \mathbb{Z}_i \cup \mathbb{Z}_j \cup T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent nul en dehors de $\mathbb{Z}_i \cup \mathbb{Z}_j$, ce dernier est nul. Or, via le triangle de localisation de Mayer-Vietoris (voir [Car04, 2.2.16.2]), on en déduit que $\mathcal{E}(\dagger \mathbb{Z}_i \cap \mathbb{Z}_j) = 0$. En réitérant le procédé, on obtient que $\mathcal{E}(\dagger \mathbb{Z}) = 0$. On conclut grâce au triangle distingué de localisation en \mathbb{Z} de \mathcal{E} . \square

Lemme 3.3.3. *Soient Y un sous-schéma fermé de X , \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Le morphisme canonique $\mathcal{H}_Y^{\dagger 0}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ est injectif.*

Démonstration. Via le triangle de localisation de \mathcal{E} par rapport à Y , il s'agit d'établir $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{E}(\dagger Y)) = 0$. Lorsque Y est un diviseur, cela résulte de l'exactitude du foncteur $(\dagger Y)$ sur la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents. On en déduit le cas général via les triangles distingués de Mayer-Vietoris (voir [Car04, 2.2.16.2]) en procédant par récurrence sur le nombre minimal de diviseurs dont l'intersection donne Y . \square

Proposition 3.3.4. *Soit \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Alors, $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent si et seulement si $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Si l'une de ces conditions est satisfaite, on a alors $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. On dispose alors du morphisme canonique de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents de la forme $\phi: u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$. Comme le noyau de ϕ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent à support dans Z , comme $\mathcal{H}^0 u^!$ est exact à gauche (sur la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents) et comme le noyau de $\mathcal{H}^0 u^!(\phi)$ est nul, on déduit alors du théorème de Berthelot-Kashiwara (voir la première partie de 3.3.2) que ϕ est injectif.

Comme le morphisme canonique $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})) \rightarrow u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$ est un isomorphisme (voir la seconde partie de 3.3.2), on en déduit que l'injection canonique $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$ se factorise par les inclusions $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{E}$ (la seconde flèche est bien injective grâce à 3.3.3). Par l'absurde, l'inclusion $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$ n'est pas un isomorphisme. Dans ce cas, il existe un ouvert affine \mathcal{U} de \mathfrak{X} , une section s sur \mathcal{U} de $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})$ qui n'est pas une section sur \mathcal{U} de $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$. Soit \mathcal{G} le sous- $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module de $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}}$ engendré par $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}}$ et par la section s . Comme le faisceau associé à un sous-préfaisceau d'un faisceau contient le sous-préfaisceau, \mathcal{G} contient strictement $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}}$. De plus, \mathcal{G} est à support dans $\mathcal{U} \cap Z$ car $\mathcal{H}_Z^{\dagger 0}(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}}$ l'est. Comme \mathcal{G} est un sous- $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini du $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$, \mathcal{G} est alors un sous- $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{\dagger}(\dagger T \cap U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Or, en appliquant le foncteur exact à gauche $\mathcal{H}^0 u^!$ aux inclusions $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$, on obtient les isomorphismes $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{G})|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}}$. Via le théorème de Berthelot-Kashiwara, le premier de ces deux isomorphismes entraîne alors que $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$, ce qui est une contradiction. \square

3.4 Stabilité de la cohérence par foncteur cohomologique local en degré maximal

Notations 3.4.1. Soit \mathfrak{B} la base de voisinages de \mathfrak{X} des ouverts affines et munis de coordonnées locales.

- On note $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ le faisceau (d'ensemble) sur \mathfrak{X} associé au préfaisceau sur \mathfrak{B} définie par $\mathcal{U} \in \mathfrak{B} \mapsto \tilde{D}_{\mathcal{U} \leftarrow Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$, les morphismes de restriction étant les morphismes canoniques (la séparée complétion est un foncteur).
- Les morphismes canoniques $\tilde{D}_{\mathcal{U} \leftarrow Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \tilde{D}_{\mathcal{U} \leftarrow Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ commutant aux morphismes de restriction, on obtient le morphisme canonique de faisceaux :

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}. \quad (3.4.1.1)$$

- Soit $\alpha^{(m)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ un morphisme $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire à gauche. Les morphismes

$$id \hat{\otimes} \Gamma(\mathcal{U} \cap Z, u^*(\alpha^{(m)})): \tilde{D}_{\mathcal{U} \leftarrow Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow \tilde{D}_{\mathcal{U} \leftarrow Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{D}_{Z \cap \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$$

sont compatibles aux morphismes de restriction et induisent donc le morphisme de faisceaux :

$$id \hat{\otimes} u^*(\alpha^{(m)}): \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{Z \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s. \quad (3.4.1.2)$$

Lemme 3.4.2. 1. Avec les notations de 3.4.1, on dispose du diagramme canonique commutatif de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} & \xrightarrow{\sim} & (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}} \\ & \nwarrow \text{3.4.1.1} \quad \nearrow & \\ & \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} & \end{array} \quad (3.4.2.1)$$

dont la flèche du haut est un isomorphisme.

2. Soient $\epsilon^{(m)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})^s$ un morphisme $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -linéaire à gauche et $\alpha^{(m)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ le morphisme induit par tensorisation par \mathbb{Q} . On dispose alors du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})^r)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{(id \hat{\otimes} u^* \epsilon^{(m)})_{\mathbb{Q}}} & (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})^s)_{\mathbb{Q}} \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r & \xrightarrow{id \hat{\otimes} u^* \alpha^{(m)}} & \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s, \end{array} \quad (3.4.2.2)$$

dont les isomorphismes verticaux sont induites par la factorisation de 3.4.2.1.

Démonstration. Pour tout $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}$, on dispose des $\mathcal{B}_{Z_i \cap U_i}^{(m)}(T \cap Z_i \cap U_i)$ -modules quasi-cohérents $\tilde{\mathcal{D}}_{U_i \leftarrow Z_i \cap U_i}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}/\pi^{i+1}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z_i \cap \mathfrak{U}}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U} \rightarrow U_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}/\pi^{i+1}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z_i \cap \mathfrak{U}}^{(m)}$. Comme le foncteur sections globales commute aux limites projectives et par quasi-cohérence de nos faisceaux sur X_i , on obtient les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{U}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)}) &= \Gamma(\mathfrak{U}, \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \Gamma(U_i, \tilde{\mathcal{D}}_{U_i \leftarrow Z_i \cap U_i}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z_i \cap U_i}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z_i \cap U_i \rightarrow U_i}^{(m)}) \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \tilde{\mathcal{D}}_{U_i \leftarrow Z_i \cap U_i}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z_i \cap U_i}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{Z_i \cap U_i \rightarrow U_i}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}}^{(m)}. \end{aligned} \quad (3.4.2.3)$$

Comme le foncteur sections globales sur les ouverts de \mathfrak{B} commute au produit tensoriel par \mathbb{Q} , en en déduit que $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})_{\mathbb{Q}}$ est le faisceau sur \mathfrak{X} associé au faisceau sur \mathfrak{B} défini par $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \mapsto (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}}^{(m)})_{\mathbb{Q}}$. Les isomorphismes canoniques 3.2.5.2 nous permettent de conclure le premier point. La seconde assertion se vérifie de même facilement. \square

Remarques 3.4.3. Avec les notations de 3.4.1, le faisceau sur \mathfrak{B} en K -espaces vectoriels $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ est aussi un faisceau sur \mathfrak{B} à valeur dans la catégorie des K -espaces topologiques (on vérifie que les morphismes de restriction sont injectifs et stricts).

Lemme 3.4.4. On suppose que $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est de codimension pure e . Soit α un morphisme de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ -modules à gauche de la forme $\alpha: (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^r \rightarrow (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$. Soit m_0 assez grand tel qu'il existe un morphisme $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -linéaire à gauche de la forme $\alpha^{(m_0)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)})^s$ induisant α par extension via $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m_0)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$. Pour $m \geq m_0$, on note $\alpha^{(m)}: (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$, le morphisme induit par extension de $\alpha^{(m_0)}$.

On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_Z^{\dagger e}((\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^r) & \xrightarrow{\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\alpha)} & \mathcal{H}_Z^{\dagger e}((\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s) \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r & \xrightarrow{\varinjlim_m (id \hat{\otimes} u^* \alpha^{(m)})} & \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \end{array} \quad (3.4.4.1)$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes.

Démonstration. Quitte à multiplier $\alpha^{(m_0)}$ par une puissance de p assez grande, on peut supposer que $\alpha^{(m_0)}$ provient par extension d'un morphisme $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}$ -linéaire à gauche de la forme $\varepsilon^{(m_0)} : (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)})^s$. Notons $\varepsilon^{(m)} : (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})^s$ les morphismes induits par extension. On obtient ainsi le foncteur dans $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)})$ de la forme

$$\varepsilon^{(\bullet+m_0)} : (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet+m_0)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet+m_0)})^s.$$

Or,

$$\varinjlim \circ u_+^{(\bullet)} \circ u_+^{(\bullet)*}(\varepsilon^{(\bullet+m_0)}) : \varinjlim_m \left(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})^r \right) \rightarrow \varinjlim_m \left(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}}^{(m)})^s \right).$$

Or, comme par définition $\varinjlim = \varinjlim_m \circ (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} -)$, en appliquant le foncteur \varinjlim_m au carré commutatif 3.4.2.2, on obtient que $\varinjlim \circ u_+^{(\bullet)} \circ u_+^{(\bullet)*}(\varepsilon^{(\bullet+m_0)})$ et $\varinjlim_m(id \hat{\otimes} u^* \alpha^{(m)})$ sont canoniquement isomorphes. Comme par définition $\mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\dagger}(\alpha) = \varinjlim \circ \mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\dagger}(\varepsilon^{(\bullet+m_0)})$, comme les deux foncteurs $\mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\dagger}$ et $u_+^{(\bullet)} \circ u_+^{(\bullet)*}$ sont isomorphes, comme $u^{(\bullet)*} = u^{(\bullet)!}[e]$, on en déduit alors le résultat. \square

Remarques 3.4.5. Avec les notations de 3.4.4, supposons \mathfrak{X} affine. Soient $\mathcal{E}^{(m_0)}$ un $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}$ -module cohérent sans p -torsion, $\mathcal{E}^{(\bullet)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet+m_0)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}} \mathcal{E}^{(m_0)}$ le $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet+m_0)}$ -module localement de présentation finie associé, $\mathcal{E} := \varinjlim(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent associé. En prenant une résolution de $\mathcal{E}^{(m_0)}$ par des $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}$ -module libre de type fini qui induit, après application du foncteur $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet+m_0)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}} -$, une résolution de $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ par des $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet+m_0)}$ -modules libres de type fini, on vérifie que le complexe $\mathbb{R}\Gamma_{\mathcal{Z}}^{\dagger}(\mathcal{E})$ est isomorphe à un complexe dont les termes sont de la forme $\mathcal{H}_{\mathcal{Z}}^{\dagger e}((\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^N)$ pour certains entiers N .

Théorème 3.4.6. *On suppose que $u : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est de codimension pure e . Soit \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. *pour $i = 0, \dots, e-1$, localement en \mathcal{Z} , les $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -modules $\mathcal{H}^i u^!(\mathcal{E})$ sont $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$ -acycliques ;*
2. *le module $u^*(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}^{\dagger}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent qui est aussi $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -cohérent pour la structure induite.*

Le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module $\mathcal{H}_{\mathcal{Z}}^{\dagger e}(\mathcal{E})$ est alors cohérent.

Démonstration. 0) *Hypothèses 1 : passage aux sections globales, quelques notations.*

Comme la $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -cohérence de $\mathcal{H}_{\mathcal{Z}}^{\dagger e}(\mathcal{E})$ est locale, on peut reprendre les notations et hypothèses du chapitre 2. Dans ce cas, posons $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$. Avec les notations de 3.1.2, les hypothèses d'acyclicité sur \mathcal{E} implique $\Gamma(\mathcal{Z}, u^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{Z}, \mathbb{L}u^* \mathcal{E}))$ (on utilise la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur dérivé de $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$). On déduit alors du lemme 3.1.3 l'isomorphisme $\Gamma(\mathcal{Z}, u^* \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathbb{L}u^*(E)) = u^*(E)$.

Choisissons une présentation finie $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{a} (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{b} E \rightarrow 0$ de E (voir le théorème de type A pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents de Berthelot dans [Ber96, 3.6.5]). En lui appliquant le foncteur $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}} -$, on en déduit la suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules à gauche $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{\beta} \mathcal{E} \rightarrow 0$. Par exactitude à droite des deux foncteurs de la forme u^* (voir les définitions de 3.1.2), on obtient les suites exactes $(u^* \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{u^*(\alpha)} (u^* \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{u^*(\beta)} u^*(\mathcal{E}) \rightarrow 0$ et $(u^* \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{u^*(a)} (u^* \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{u^*(b)} u^*(E) \rightarrow 0$. Comme $\Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\alpha)) = u^*(a)$,

comme le morphisme canonique $u^*(E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Z}, u^* \mathcal{E})$ est un isomorphisme, en appliquant le foncteur $\Gamma(\mathcal{Z}, -)$ à l'avant dernière suite exacte, on obtient encore une suite exacte (canoniquement isomorphe à la dernière). En posant $\mathcal{M} := u^* \mathcal{E}$, $M := \Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{M})$, $\phi := \Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\alpha))$ et $\psi := \Gamma(\mathcal{Z}, u^*(\beta))$, on obtient donc la suite exacte $(u^* \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow{\phi} (u^* \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$.

0 bis) *Hypothèses 2 : niveaux $m \geq m_0$, quelques notations.*

Soit $m_0 \geq 0$ assez grand tel que, pour tout $m \geq m_0$, il existe un morphisme $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire à gauche de la forme $\alpha^{(m)} : (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s$ et induisant α par extension via $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$. D'après la seconde partie de nos hypothèses, \mathcal{M} est associé à un isocrystal sur $Z \setminus U$ surconvergent le long de U (voir [Ber96, 4.1]). Donc, comme $M = \Gamma(Z, \mathcal{M})$, comme Z est affine et lisse, le $\mathcal{O}_Z({}^{\dagger}U)_{\mathbb{Q}}$ -module M est alors projectif et de type fini. De plus, d'après [Ber96, 4.4], quitte à augmenter λ_0 et m_0 , il existe un $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module de type fini $\mathcal{M}^{(m_0)}$ qui est, pour la structure induite de $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module, un $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module projectif de type fini et un isomorphisme $\mathcal{D}_Z^{\dagger}({}^{\dagger}U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_Z^{\dagger}({}^{\dagger}U)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m_0)}} \mathcal{M}^{(m_0)}$. Pour tout $m \geq m_0$, on pose alors $\mathcal{M}^{(m)} := \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m_0)}} \mathcal{M}^{(m_0)}$.

Notons $\beta^{(m)} : (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow \mathcal{E}$ le composé de l'inclusion canonique $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s \hookrightarrow (\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$ avec le morphisme β . Posons enfin $\phi^{(m)} := \Gamma(Z, u^*(\alpha^{(m)}))$ et $\psi^{(m)} := \Gamma(Z, u^*(\beta^{(m)}))$. Avec les définitions et notations de 3.1.2, on obtient ainsi la suite $(u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^r \xrightarrow{\phi^{(m)}} (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\psi^{(m)}} M \rightarrow 0$. On remarque que cette suite devient exacte seulement après passage à la limite sur le niveau.

1) *Hypothèses 2 : topologie de type LB sur M , niveaux $m \geq m_1$, sections continues $\theta, \theta^{(m)}$.*

On munit M de la topologie canonique de $\mathcal{O}_Z({}^{\dagger}U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini qui en fait un $\mathcal{O}_Z({}^{\dagger}U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type LB (voir 2.1.5 et 2.2.5). Comme M est un $\mathcal{O}_Z({}^{\dagger}U)_{\mathbb{Q}}$ -module projectif, il existe alors un morphisme $\mathcal{O}_Z({}^{\dagger}U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire $\theta : M \rightarrow (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$ tel que $\psi \circ \theta = \text{id}$. Comme $M^{(m_0)}$ est un $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini, il existe $m_1 \geq m_0$ tel que, pour tout $m \geq m_1$, on ait $\theta(M^{(m_0)}) \subset (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s$. Ainsi, cette section θ se factorise (de manière unique) en un morphisme $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m_0)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme $M^{(m_0)} \rightarrow (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s$. D'où la factorisation $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire unique $\theta^{(m)} : M^{(m)} \rightarrow (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s$ pour tout $m \geq m_1$. Or, une base de voisinages de zéro sur $(u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s$ est donnée par la famille de $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m)}(U)$ -modules $(p^n(u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^s)_{n \in \mathbb{N}}$. On en déduit que le morphisme $\theta^{(m)}$ de $\tilde{\mathcal{B}}_Z^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -modules de Banach est alors continue. Par composition de morphismes continus, il en est donc de même $M^{(m)} \rightarrow (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$. Par passage à la limite sur le niveau $m \geq m_1$, la section $\theta : M \rightarrow (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$ est alors continue.

2) *Le K -espace G de type LB, les K -espaces de Banach $G^{(m)}$.* Avec les topologies canoniques respectives (voir les définitions de 2.1.2), d'après la proposition 2.3.1, l'application ϕ est un morphisme continu de K -espaces de type LB (voir 2.3.3). Notons $G := (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^r / \ker(\phi)$ le K -espace localement convexe dont la topologie est celle qui fait de la projection canonique $\pi : (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^r \twoheadrightarrow G$ un morphisme strict. Notons $\iota : G \hookrightarrow (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$ le monomorphisme tel que $\iota \circ \pi = \phi$. Comme ϕ est continue, alors ι est continu. Comme $(u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$ est séparé (voir 2.3.3), il en est alors de même de G . Ainsi G est un quotient séparé d'un espace de type LB. D'après 1.1.7, cela entraîne que G est aussi un espace de type LB. Plus précisément, d'après sa preuve, en notant $G^{(m)} := (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^r / (\ker(\phi) \cap (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^r)$ muni de la topologie quotient, $G^{(m)}$ est un K -espace de Banach et l'isomorphisme canonique $\varinjlim_m G^{(m)} \xrightarrow{\sim} G$ est aussi un homéomorphisme. Comme par définition le morphisme $(u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)})^r \rightarrow G^{(m)}$ est strict, il découle de 3.2.2, que l'on dispose de l'épimorphisme strict

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \twoheadrightarrow \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(m)}. \quad (3.4.6.1)$$

Il résulte alors de 1.1.3 que l'on dispose de l'épimorphisme strict :

$$\varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \twoheadrightarrow \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(m)}. \quad (3.4.6.2)$$

3) *Les applications ϕ, ι et ψ sont des morphismes stricts.*

D'après ce qui précède, on dispose du morphisme $\mathcal{O}_{Z, \mathbb{Q}}$ -linéaire $(\iota, \theta) : G \oplus M \rightarrow (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s$ qui est aussi une application continue et bijective entre deux K -espaces de type LB. D'après le théorème de l'application ouverte de Banach (voir [Sch02, 8.8]), le morphisme (ι, θ) est donc un homéomorphisme. Comme ϕ est le morphisme composé

$$\phi : (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^r \xrightarrow[\pi]{\sim} G \subset G \oplus M \xrightarrow[\iota, \theta]{\sim} (u^*\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})^s, \quad (3.4.6.3)$$

le morphisme ϕ est alors strict (ce qui d'ailleurs est équivalent à la propriété que le morphisme \mathfrak{t} est strict). On remarque que, comme M est un K -espace séparé, alors G est un fermé de $G \oplus M$ (car homéomorphe au fermé $G \oplus \{0\}$). Enfin, comme $\mathfrak{t}(G) = \text{Im}(\phi) = \ker(\psi)$, on obtient le carré commutatif canonique

$$\begin{array}{ccc} G \oplus M & \xrightarrow[\sim]{(\mathfrak{t}, \theta)} & (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s \\ \downarrow (0, id) & & \downarrow \psi \\ M & \xlongequal{\quad} & M, \end{array} \quad (3.4.6.4)$$

dont on sait déjà que toutes les flèches autres que ψ sont continues et dont la flèche du haut est un homéomorphisme. On en déduit la continuité de ψ . Comme ψ est un morphisme continu et surjectif entre deux espaces de type LB , on en déduit que ψ est un morphisme strict.

4) Constructions et propriétés de $H^{(m)}$ et $N^{(m)}$.

Dans toute la suite de la preuve, m sera toujours par défaut un entier plus grand que $m_1 \geq m_0$. Notons $H^{(m)} := \mathfrak{t}^{-1}((u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s)$ et $\mathfrak{t}^{(m)}: H^{(m)} \hookrightarrow (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ le morphisme $\tilde{D}_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaire induit par \mathfrak{t} . On munit $H^{(m)}$ de l'unique topologie telle que $\mathfrak{t}^{(m)}$ soit un morphisme strict (avec $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ muni de sa topologie canonique de K -espace de Banach). On a vu au cours de l'étape 3 que $\mathfrak{t}(G)$ est fermé. Il en résulte que $\mathfrak{t}^{(m)}(H^{(m)})$ est un fermé de $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s$ qui est un $\tilde{B}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach. Ainsi, $H^{(m)}$ est aussi un $\tilde{B}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach. Notons alors $N^{(m)} := \text{Im}(\psi^{(m)})$ et $\psi'^{(m)}: (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow N^{(m)}$ l'épimorphisme canonique factorisant $\psi^{(m)}$. On obtient alors sur $N^{(m)}$ une structure de $\tilde{B}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -module de Banach qui fait de l'épimorphisme $\tilde{B}_{\mathfrak{Z}}^{(m)}(U)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire $\psi'^{(m)}: (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow N^{(m)}$ une application stricte. On dispose ainsi du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\mathfrak{t}} & (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})^s & \xrightarrow{\psi} & M \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & \nearrow \psi^{(m)} & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & H^{(m)} & \xrightarrow{\mathfrak{t}^{(m)}} & (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s & \xrightarrow{\psi'^{(m)}} & N^{(m)} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3.4.6.5)$$

dont les morphismes horizontaux sont stricts et forment deux suites exactes courtes (la première est d'ailleurs scindée via θ). Comme le composé de $H^{(m)} \subset G$ avec \mathfrak{t} est continu, comme \mathfrak{t} est un monomorphisme strict, on remarque que l'inclusion $H^{(m)} \subset G$ est alors continue. Enfin, comme $\psi^{(m)}$ est continu, l'inclusion $N^{(m)} \subset M$ l'est aussi.

Grâce à 3.2.2, la suite exacte courte du bas de 3.4.6.5 induit la suite exacte avec morphismes stricts :

$$0 \rightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} \xrightarrow{id \hat{\otimes} \mathfrak{t}^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{id \hat{\otimes} \psi'^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \rightarrow 0. \quad (3.4.6.6)$$

En passant à la limite sur le niveau, il en résulte la suite exacte avec morphismes continues :

$$0 \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathfrak{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \rightarrow 0. \quad (3.4.6.7)$$

5) Passage à la limite sur le niveau pour $G^{(m)}$ et $H^{(m)}$: comparaison.

Notons $j_m: G^{(m)} \rightarrow G$ le monomorphisme canonique continue. Pour tout $m \geq m_1$, comme le morphisme ϕ se factorise par le morphisme continu $\phi^{(m)}: (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})^s$, on obtient alors l'inclusion $\mathfrak{t} \circ j_m(G^{(m)}) \subset (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}})^s$ et donc $j_m(G^{(m)}) \subset H^{(m)}$. Le monomorphisme continu j_m se factorise donc (de manière unique) par un monomorphisme continu de la forme $G^{(m)} \rightarrow H^{(m)}$.

Réciproquement, comme $H^{(m)}$ est un K -espace de Banach, comme $G = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} j_m(G^{(m)})$, d'après [Sch02, 8.9], il existe $N_m \geq m$ assez grand tel que $H^{(m)} \subset G$ est le composé d'un morphisme (unique) continu de la forme $H^{(m)} \rightarrow G^{(N_m)}$ suivi de j_{N_m} . Il ne coûte rien de supposer que la suite $(N_m)_{m \geq m_1}$ est strictement croissante.

D'après 3.2.3, on dispose alors des monomorphismes continus :

$$\tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} \hookrightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(N_m)} \hookrightarrow \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(N_m)}. \quad (3.4.6.8)$$

En passant la suite 3.4.6.8 à la limite inductive sur le niveau, grâce 2.3.3.1, son composé est un homéomorphisme. Comme le foncteur de passage à la limite inductive sur le niveau préserve la continuité et l'injectivité, on en déduit que le morphisme canonique horizontal du haut du carré

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(N_m)} & \longrightarrow & \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(N_m)} \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} G^{(m)} & \longrightarrow & \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)}, \end{array} \quad (3.4.6.9)$$

est un homéomorphisme. Comme les morphismes verticaux sont des homéomorphismes (voir 2.3.3.1), il en est de même de la flèche du bas.

6) *Passage à la limite sur le niveau pour $M^{(m)}$ et $N^{(m)}$: comparaison.*

Comme $\psi^{(m)}$ est continu, pour tout $m \geq m_1$, d'après [Sch02, 8.9], il existe $N_m \geq m$ assez grand tel que $\psi^{(m)} : (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow M$ est la composition d'un morphisme continu (forcément unique) de la forme $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow M^{(N_m)}$ suivi du monomorphisme $M^{(N_m)} \hookrightarrow M$. Comme $N^{(m)} = \text{Im}(\psi^{(m)}) = \text{Im}(\psi'^{(m)})$, ce morphisme $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow M^{(N_m)}$ se décompose de manière unique en $(u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\psi'^{(m)}} N^{(m)} \hookrightarrow M^{(N_m)}$. Le morphisme $\psi^{(m)}$ induit donc le morphisme composé ci-dessous noté abusivement

$$u_+^{(m)}(\psi^{(m)}) : \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{id \hat{\otimes} \psi'^{(m)}} \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} M^{(m)}.$$

La notation $u_+^{(m)}(\psi^{(m)})$ est justifiée par le fait que ce morphisme composé ne dépend pas du choix de N_m mais seulement du niveau m fixé, de $\psi^{(m)}$ et de l'immersion fermée u . En passant à la limite sur le niveau, on obtient les morphismes continues :

$$\varinjlim_m u_+^{(m)}(\psi^{(m)}) : \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{id \hat{\otimes} \psi'^{(m)}} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} N^{(m)} \rightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} M^{(m)}. \quad (3.4.6.10)$$

Comme, pour tout $m \geq m_1$, le morphisme $\psi^{(m)} \circ \theta^{(m)}$ est l'inclusion canonique $M^{(m)} \hookrightarrow M$, ce dernier se factorise alors canoniquement en $M^{(m)} \hookrightarrow N^{(m)} \subset M$. On en déduit comme pour l'étape 5 que la flèche de droite de 3.4.6.10 est un homéomorphisme.

7) *Première conclusion.*

En composant 3.4.6.2 avec l'isomorphisme du bas de 3.4.6.9, on obtient l'épimorphisme strict de la suite :

$$\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \twoheadrightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} H^{(m)} \hookrightarrow \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s, \quad (3.4.6.11)$$

la seconde flèche étant le monomorphisme de 3.4.6.7. On déduit alors de la suite exacte 3.4.6.7 et du fait que la flèche de droite de 3.4.6.10 est homéomorphisme, la suite exacte :

$$\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{Z}}^\dagger} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\beta_{\mathcal{Z}}^\dagger} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} M^{(m)} \rightarrow 0, \quad (3.4.6.12)$$

où $\alpha_{\mathcal{Z}}^\dagger := id \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \Gamma(\mathcal{Z}, u^* \alpha^{(m)})$, qui est égale au composé des deux morphismes de 3.4.6.11, et où, avec les notations de l'étape 6, $\beta_{\mathcal{Z}}^\dagger := \varinjlim_m u_+^{(m)}(\Gamma(\mathcal{Z}, u^* \beta^{(m)}))$.

8) *Faisceautisation.*

i) Soit \mathfrak{B} la base de voisinages de \mathfrak{X} des ouverts affines. Par définition de $\mathcal{M}^{(m)}$, on vérifie que le préfaisceau sur \mathfrak{B} défini par $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \mapsto \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, \mathcal{M}^{(m)})$ est en fait un faisceau dont le faisceau sur \mathfrak{X} est $u_+(\mathcal{M})$.

ii) Avec les notations de 3.4.1, comme le foncteur faisceau associé à un préfaisceau (d'ensemble) commute aux limites inductives filtrantes, le faisceau associé au préfaisceau $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B} \mapsto \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*((\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r))$ est $\varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r$, de même pour un autre entier que r .

iii) Pour tout $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}$, notons $u|_{\mathfrak{U}}: \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{U}$ l'immersion fermée induite par u . Pour tout $m \geq m_1$, on dispose de la suite (par forcément exacte) : $(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \xrightarrow{\alpha^{(m)}|_{\mathfrak{U}}} (\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \xrightarrow{\beta^{(m)}|_{\mathfrak{U}}} \mathcal{E}|_{\mathfrak{U}} \rightarrow 0$. Comme pour 3.4.6.12, (il suffit de remplacer u par $u|_{\mathfrak{U}}$), on obtient alors la suite exacte

$$\varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*((\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r)) \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{U}}^\dagger} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*((\tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s)) \xrightarrow{\beta_{\mathfrak{U}}^\dagger} \varinjlim_m \tilde{D}_{\mathfrak{U} \leftarrow \mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^*(\mathcal{M}^{(m)})) \rightarrow 0.$$

où $\hat{\otimes}$ désigne $\hat{\otimes}_{\tilde{D}_{\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U}, \mathbb{Q}}^{(m)}}$ et où $\alpha_{\mathfrak{U}}^\dagger := id \hat{\otimes} \Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^* \alpha^{(m)})$ et $\beta_{\mathfrak{U}}^\dagger := \varinjlim_m (u|_{\mathfrak{U}})_+^{(m)} (\Gamma(\mathfrak{U} \cap \mathcal{Z}, u^* \beta^{(m)}))$. Comme ces suites exactes sont compatibles aux morphismes de restriction, comme le foncteur faisceau associé à un préfaisceau est exact, on obtient alors la suite exacte :

$$\varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^r \xrightarrow{\varinjlim_m id \hat{\otimes} u^* \alpha^{(m)}} \varinjlim_m \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)} \hat{\otimes}_{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}, \mathbb{Q}}^{(m)}} (u^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})^s \rightarrow u_+(\mathcal{M}) \rightarrow 0. \quad (3.4.6.13)$$

9) *Fin de la preuve.* Comme le foncteur $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}$ est exact à droite (dans la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents), alors le conoyau de $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\phi)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\mathcal{E})$. Or, il découle du lemme 3.4.4 et de la suite exacte 3.4.6.13, que le conoyau de $\mathcal{H}_Z^{\dagger e}(\phi)$ est isomorphe à $u_+ u^*(\mathcal{E})$. Enfin, comme u est propre et $u^*(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent, alors $u_+ u^*(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. \square

Corollaire 3.4.7. *On suppose que $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est de codimension pure 1. Soit \mathcal{E} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent tel que $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$ soit un $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent et que $\mathcal{H}^1 u^!(\mathcal{E})$ soit un $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent qui soit aussi $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}(\dagger U)_{\mathbb{Q}}$ -cohérent pour la structure induite. Le complexe $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$ est alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -cohérent.*

Démonstration. La $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -cohérence du complexe $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$ résulte de 3.3.4 et de 3.4.6. \square

Remarques 3.4.8. Avec leurs notations, le corollaire 3.4.7 ainsi que le théorème 3.4.9 ci-dessous donnent une condition suffisante sur \mathcal{E} pour valider l'implication $u^!(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}^\dagger(U)_{\mathbb{Q}}) \Rightarrow u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(\bullet)}(U))$.

Théorème 3.4.9. *On suppose que $u: \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est de codimension pure 1. Soit $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ est un objet de $\underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$ et $\mathcal{E} := \varinjlim (\mathcal{E}^{(\bullet)})$ l'objet de $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(T)_{\mathbb{Q}})$ correspondant. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $u^{(\bullet)!}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(\bullet)}(U))$.
2. $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$.
3. $(\dagger Z)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \text{coh}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(\bullet)}(T))$.
4. $(\dagger Z)(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(T)_{\mathbb{Q}})$.
5. $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(T)_{\mathbb{Q}})$.

Démonstration. Les équivalences $2 \Leftrightarrow 3$ et $4 \Leftrightarrow 5$ résultent du triangle distingué de localisation $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow \mathcal{E}^{(\bullet)} \rightarrow (\dagger Z)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \rightarrow +1$. L'équivalence $3 \Leftrightarrow 4$ est exactement le corollaire [Car12, 3.5.2]. L'équivalence $1 \Leftrightarrow 2$ découle de l'isomorphisme canonique $u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ (voir [Car12, 5.3.7.1]), de l'isomorphisme canonique $u^{(\bullet)\dagger} \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} u^{(\bullet)\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$, ainsi que du théorème de Berthelot-Kashiwara toujours valable dans le contexte des catégories de la forme $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_X^{(\bullet)}(T))$ (voir [Car12, 5.3.5]). \square

Remarques 3.4.10. Avec ses notations, si l'une des conditions équivalentes du théorème 3.4.9 est satisfaite, alors on dispose sans ambiguïté de l'isomorphisme $u_+ \circ u^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$ (i.e. le terme de gauche peut se calculer comme on veut). Notons $(\varinjlim)^{-1}$ une équivalence quasi-inverse de $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(\bullet)}(U)) \cong D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_Z^\dagger(\dagger U)_{\mathbb{Q}})$. Par contre, si $u^!(\mathcal{E}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_Z^\dagger(U)_{\mathbb{Q}})$, alors il n'est pas clair que $(\varinjlim)^{-1}(u^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} u^{(\bullet)\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)})$, cet isomorphisme étant d'ailleurs équivalent à demander que $u^{(\bullet)\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \in \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(\bullet)}(U))$. Il n'est alors pas évident que le complexe $u_+(u^!(\mathcal{E})) = \varinjlim \circ u_+^{(\bullet)} \circ (\varinjlim)^{-1}(u^!(\mathcal{E}))$ soit isomorphe à $\varinjlim \circ u_+^{(\bullet)} \circ u^{(\bullet)\dagger}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$. La cohérence de $u^!(\mathcal{E})$ implique la cohérence de $u_+(u^!(\mathcal{E}))$ mais il n'est donc pas clair que $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\mathcal{E})$ soit alors aussi cohérent.

Références

- [Ber96] P. BERTHELOT – « \mathcal{D} -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), no. 2, p. 185–272. 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 18
- [Ber02] — , « Introduction à la théorie arithmétique des \mathcal{D} -modules », *Astérisque* (2002), no. 279, p. 1–80, Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II. 14
- [BGR84] S. BOSCH, U. GÜNTZER et R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry. 8, 9
- [Car04] D. CARO – « \mathcal{D} -modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **54** (2004), no. 6, p. 1943–1996. 14, 15
- [Car12] — , « Systèmes inductifs surcohérents de \mathcal{D} -modules arithmétiques », *ArXiv Mathematics e-prints* (2012). 2, 22
- [Mat89] H. MATSUMURA – *Commutative ring theory*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, Translated from the Japanese by M. Reid. 10
- [Sch02] P. SCHNEIDER – *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002. 4, 14, 18, 19, 20

Daniel Caro
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen Campus 2
14032 Caen Cedex
France.
email : daniel.caro@unicaen.fr